簡約化された中心アファイン曲線

藤岡敦

関西大学システム理工学部数学科

２０２６年１月３１日（土）
南あわじ市阿那賀地区公民館, 淡路島幾何学研究集会 2026
(古畑仁氏 (北海道大学) との共同研究)

内容

背景と主結果

- 余等質性 1 の中心アファイン曲面
  - 「標準形」で表すことができる
  - 「標準母線」を考えることができる
  - 固定された行列を含む常微分方程式の解となる
  - 「簡約化された中心アファイン曲線」とみなす
- 簡約化された中心アファイン曲線
  - 曲率は球面に値をとる
  - 中心アファイン変換群よりも小さい対称性をもつ
  - 曲率が大円に値をとるものは等質中心アファイン超曲面に含まれる

中心アファイン微分幾何と余等質性 1 の中心アファイン曲面

中心アファイン微分幾何: アファイン空間内の部分多様体の中心アファイン変換で不変な性質を調べる

中心アファイン変換: 原点を固定するアファイン変換

$$\rightsquigarrow$$

$$\mathbb{R}^n \text{ の中心アファイン変換群} \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

余等質性 1 の中心アファイン曲面は

$$f(x, y) = \gamma(x) e^{yA}$$

と表される
ただし

$$\gamma\colon \mathbb{R}^3 \text{ 内の曲線}, \quad A \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$$

標準形

簡単のため不定値な場合を考える
(Euclid Gauss 曲率が負)

補題

$f : M^2 \to \mathbb{R}^3$: 不定値中心アファイン曲面
余等質性 1
$\Longrightarrow f$ は

$$f(u, v) = \gamma(u + v)e^{(u-v)A} = \gamma(s)e^{tA}$$

と表すことができる (標準形)
ただし

$$(u, v)\text{: 漸近線座標}, \quad \gamma\text{: } \mathbb{R}^3 \text{ 内の曲線 (標準母線)},$$

$$A \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}), \quad s = u + v, \quad t = u - v$$

平坦ではない固有アファイン球面の場合

定理 (F.-Furuhata)

$f : M^2 \to \mathbb{R}^3$: 原点を中心とする平坦ではない不定値固有アファイン球面
余等質性 1

$\Longrightarrow$ 標準形における γ, A は次のようにあたえられる

- A の最小多項式は $t^3 - \dfrac{c}{4}t + \dfrac{a-b}{8}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$
- γ は常微分方程式

$$(2\varphi' + a + b)\gamma' = \gamma\{4\varphi A^2 + (a-b)A - 2\varphi^2 E\}$$

の解

ただし $\varphi \neq 0,\ \varphi' \neq 0, -\frac{a+b}{2}$ で

$$(\varphi')^2 = -2\varphi^3 + c\varphi^2 + ab$$

より一般に γ は A を含む常微分方程式の解として表される

線形代数に関する命題

命題

$A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$
${}^{\exists}v \in \mathbb{R}^n$ s.t.

$$\det \begin{pmatrix} v \\ vA \\ \vdots \\ vA^{n-1} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (*)$$

$$\Updownarrow$$

A の最小多項式の次数は n

証明

$\Downarrow$: 対偶を示す
$\Uparrow$: $\mathbb{C}^n$ を A の広義固有空間の直和として表す

簡約化された中心アファイン曲線の定義

M_n: 最小多項式の次数が n の $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の元全体
$A \in M_n$: 固定

$$V_A := \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ は } (*) \text{ をみたす} \}$$

定義

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$: 曲線

γ: A に付随する簡約化された中心アファイン曲線

$$\Updownarrow \text{def.}$$

$$^\forall t \in I,\ \gamma(t) \in V_A$$

正則な曲線を考える: $^\forall t \in I,\ \gamma'(t) \neq 0$

曲率

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$: $A \in M_n$ に付随する簡約化された正則中心アファイン曲線

必要ならば変数変換を行うことにより

$^\exists \kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n) : I \to S^{n-1}$ (単位球面) s.t.

$$\gamma' = \gamma(\kappa_1 E + \kappa_2 A + \cdots + \kappa_n A^{n-1}) \quad \text{(正規化)}$$

κ を曲率という

γ は曲率の積分を用いて具体的に表すことができる

$C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}(A)$: A と可換な元からなる $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の部分群

$$C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}(A) = \{P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \,|\, AP = PA\}$$

$P \in C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}(A)$

$\Longrightarrow \gamma P$: γ と同じ曲率をもつ

曲率が大円に値をとる場合

定理 (F.-Furuhata)

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$: 簡約化された中心アファイン曲線
曲率が大円に値をとる
$\Longrightarrow \gamma$ はある等質中心アファイン超曲面に含まれる

証明

$\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n) : I \to S^{n-1}$: γ の曲率

仮定より $^\exists(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ s.t. $\sum_{i=1}^{n} a_i \kappa_i = 0$

$$\mathfrak{g} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i A^{i-1} \;\middle|\; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$$

等質中心アファイン超曲面は $\{v \exp X \mid X \in \mathfrak{g}\}$ $(v \in V_A)$
としてあたえられる

平面曲線の場合

定理 (F.-Furuhata)

$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$: 簡約化された中心アファイン曲線
曲率が一定
$\Longrightarrow \gamma$ は次の等質中心アファイン曲線と中心アファイン合同な曲線に含まれる

$$(1)\ x^k y^l = 1$$

$$(2)\ (x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}} \exp\left(l \tan^{-1} \frac{x}{y}\right) = 1$$

$$(3)\ k \log y + l \frac{x}{y} = 0$$

ただし $(k, l) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

標準母線の場合

γ: 余等質性 1 の中心アファイン曲面に対する標準母線
一般には γ は簡約化された中心アファイン曲線
曲率は次のいずれかに値をとる

(1) 大円
(2) 楕円錐と球面の共通部分

(1) の場合: γ は原点を通る平面に含まれる
(2) の場合: 曲率が円錐と球面の共通部分に値をとる場合は更に計算可能
曲率は小円に値をとる
γ は曲率が大円に値をとる曲線を変形することにより得られる

ご清聴ありがとうございました