余等質性 1 の中心アファイン曲面と簡約化された中心アファイン曲線

藤岡敦

関西大学システム理工学部数学科

２０２６年３月６日（金）
名古屋工業大学, 名工大幾何学小研究集会 2026
(古畑仁氏 (北海道大学) との共同研究)

内容

背景と主結果

- 余等質性 1 の中心アファイン曲面
  - 「標準形」で表すことができる
  - 「標準母線」を考えることができる
  - 固定された行列を含む常微分方程式の解となる
  - 「簡約化された中心アファイン曲線」とみなす
- 簡約化された中心アファイン曲線
  - 曲率は球面に値をとる
  - 中心アファイン変換群よりも小さい対称性をもつ
  - 曲率が大円に値をとるものは等質中心アファイン超曲面に含まれる

アファイン超曲面の定義と Gauss-Weingarten の公式

$f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$: 超曲面 (はめ込み)
ξ: f に沿うベクトル場

$$(f, \xi) \text{ または } f\text{: アファイン超曲面}$$
$$\Updownarrow \text{def.}$$
$$^{\forall}x \in M,\ \ \xi(x) \pitchfork f_* T_x M$$

ξ を横断的ベクトル場という

f をアファイン超曲面とする
D: $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準平坦接続
$\Longrightarrow$ Gauss-Weingarten の公式:

$$\begin{cases} D_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + h(X, Y)\xi \\ D_X \xi = -f_* SX + \tau(X)\xi \end{cases} \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

$$\left(\begin{array}{c} \nabla\text{: 誘導接続},\ h\text{: アファイン基本形式} \\ S\text{: アファイン型作用素},\ \tau\text{: 横断的接続形式} \end{array} \right)$$

非退化性, 定値性, 不定値性

定義

$f: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$: アファイン超曲面
h: アファイン基本形式

$$f\text{: 非退化 (resp. 定値, 不定値)}$$
$$\Updownarrow \text{def.}$$
$$h\text{: 非退化 (resp. 定値, 不定値)}$$

命題

上の定義は横断的ベクトル場 ξ の選び方に依存しない

証明

$\bar{\xi} := \lambda\xi + (\text{接成分}) \quad (\lambda : M \to \mathbb{R} \setminus \{0\}) \implies \lambda\bar{h} = h$

非退化アファイン曲面の場合

命題

$f: M^2 \to \mathbb{R}^3$: 非退化アファイン曲面
K: Euclid Gauss 曲率

$$f\text{: 定値 (resp. 不定値)} \iff K > 0 \text{ (resp. } K < 0)$$

証明

(x_1, x_2): 局所座標系
Gauss の公式は

$$f_{x_i x_j} = \Gamma_{ij}^1 f_{x_1} + \Gamma_{ij}^2 f_{x_2} + h(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})\xi \quad (i = 1, 2)$$

n: 単位法ベクトル場
上の式と n の内積を取ると

$$\langle f_{x_i x_j}, n \rangle = h(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) \langle \xi, n \rangle$$

Blaschke 超曲面

$f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$: 非退化アファイン超曲面
ξ: 横断的ベクトル場
標準平坦接続 D に関して平行な $\mathbb{R}^{n+1}$ の体積要素 ω を固定
$\rightsquigarrow$ θ: (f, ξ) の誘導する体積要素

$$\theta(X_1, \ldots, X_n) = \omega(f_* X_1, \ldots, f_* X_n, \xi) \ (X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M))$$

アファイン基本形式 h は非退化
$\rightsquigarrow$ ω_h: h に関する体積要素

命題

$\tau = 0$ かつ $\theta = \omega_h$ となる横断的ベクトル場 ξ が符号を除いて一意的に存在

上のような横断的ベクトル場を Blaschke 法ベクトル場という
このとき f を Blaschke 超曲面という
また h を Blaschke 計量という

中心アファイン超曲面

定義

$f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$: 超曲面

$$\xi := -\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Bigg|_f$$

f: 中心アファイン超曲面 $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ (f, ξ): アファイン超曲面

$f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$: 非退化中心アファイン超曲面
∇: 誘導接続
h: アファイン基本形式 (中心アファイン計量)
$\hat{\nabla}$: h に対する Levi-Civita 接続
$C := \nabla - \hat{\nabla}$: 差テンソル
$T := \dfrac{1}{n}\mathrm{tr}_h C$: Tchebychev ベクトル場
$\mathcal{T} := \hat{\nabla} T$: Tchebychev 作用素

中心アファイン微分幾何と余等質性 1 の中心アファイン曲面

中心アファイン微分幾何: アファイン空間内の部分多様体の中心アファイン変換で不変な性質を調べる

中心アファイン変換: 原点を固定するアファイン変換

$$\rightsquigarrow$$

$$\mathbb{R}^n \text{ の中心アファイン変換群} \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

余等質性 1 の中心アファイン曲面は

$$f(x, y) = \gamma(x) e^{yA}$$

と表される
ただし

$$\gamma\colon \mathbb{R}^3 \text{ 内の曲線}, \quad A \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$$

例 1
原点を中心とする平坦な固有アファイン球面

例 (原点を中心とする平坦な固有アファイン球面)

$f = (X, Y, Z) : M^2 \to \mathbb{R}^3$: 原点を中心とする平坦な固有アファイン球面
$\Longrightarrow$ 中心アファイン合同を除いて

$$XYZ = 1 \quad \text{または} \quad (X^2 + Y^2)Z = 1$$

(cf. 1990 Magid-Ryan)
これらは余等質性 1
例えば前者については

$$\gamma(x) = (e^x, 1, e^{-x}), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

上の曲面は次の例に含まれる

例 2

Tchebychev 作用素が消える平坦な非退化中心アファイン曲面

定理 (1995 Liu-Wang)

$f = (X, Y, Z) : M^2 \to \mathbb{R}^3$: 平坦な非退化中心アファイン曲面
Tchebychev 作用素 $= 0$

$\Longrightarrow$ f は次の何れかと中心アファイン合同

(1) $X^p Y^q Z^r = 1$ ($p, q, r \in \mathbb{R}$ s.t. $pqr(p+q+r) \neq 0$)

(2) $\left\{\exp\left(-p\tan^{-1}\dfrac{X}{Y}\right)\right\}(X^2+Y^2)^q Z^r = 1$
($p, q, r \in \mathbb{R}$ s.t. $r(2q+r)(p^2+q^2) \neq 0$)

(3) $Z = -X(p\log X + q\log Y)$ ($p, q \in \mathbb{R}$ s.t. $q(p+q) \neq 0$)

(4) $Z = \pm X\log X + \dfrac{Y^2}{X}$

(5) $f = (e^x, \psi_1(x)e^y, \psi_2(x)e^y)$, ψ_1, ψ_2 は x の任意関数 $\lambda = \lambda(x)$ に対する微分方程式 $\psi'' - \psi' - \lambda\psi = 0$ の 1 次独立解

上の曲面はすべて余等質性 1

標準形

簡単のため不定値な場合を考える
(Euclid Gauss 曲率が負)

補題

$f: M^2 \to \mathbb{R}^3$: 不定値中心アファイン曲面
余等質性 1

$\Longrightarrow f$ は

$$f(u, v) = \gamma(u+v)e^{(u-v)A} = \gamma(s)e^{tA}$$

と表すことができる (標準形)
ただし

(u, v): 漸近線座標, γ: $\mathbb{R}^3$ 内の曲線 (標準母線),

$$A \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}), \quad s = u+v, \quad t = u-v$$

記号の準備

$f : M^2 \to \mathbb{R}^3$: 不定値中心アファイン曲面
(u, v): 漸近線座標
$\varphi := h(\partial_u, \partial_v)$
d: 原点からの Euclid 支持関数

$$\rho := -\frac{1}{4}\log\left(-\frac{K}{d^4}\right)$$

$(= \log(\pm r))$ (r: 原点からの等積アファイン支持関数)

$$a := \varphi \det\begin{pmatrix} f \\ f_u \\ f_{uu} \end{pmatrix} \Big/ \det\begin{pmatrix} f \\ f_u \\ f_v \end{pmatrix}$$

$$b := \varphi \det\begin{pmatrix} f \\ f_v \\ f_{vv} \end{pmatrix} \Big/ \det\begin{pmatrix} f \\ f_v \\ f_u \end{pmatrix}$$

標準形に対する Gauss の公式
その 1

$f : M^2 \to \mathbb{R}^3$: 不定値中心アファイン曲面
余等質性 1
標準形で表しておく

$\Longrightarrow$ Gauss の公式:

$$\begin{cases} f_{uu} = \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi} + \alpha' + \dfrac{1}{2} C_1 \right) f_u + \dfrac{a}{\varphi} f_v \\ f_{vv} = \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi} + \alpha' - \dfrac{1}{2} C_1 \right) f_v + \dfrac{b}{\varphi} f_u \\ f_{uv} = -\varphi f + \left(\alpha' - \dfrac{1}{2} C_1 \right) f_u + \left(\alpha' + \dfrac{1}{2} C_1 \right) f_v \end{cases}$$

ただし

$$\varphi,\ \alpha,\ a,\ b\text{: } s \text{ の関数}, \quad \rho = \alpha(s) + \frac{C_1}{2} t, \quad C_1 = \operatorname{tr} A$$

標準形に対する積分可能条件

標準形に対する Gauss の公式の積分可能条件:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)' = -\varphi - \dfrac{ab}{\varphi^2} + (\alpha')^2 - \dfrac{1}{4}C_1^2 \\ a' + \left(\alpha' + \dfrac{1}{2}C_1\right)\varphi' = \alpha''\varphi \\ b' + \left(\alpha' - \dfrac{1}{2}C_1\right)\varphi' = \alpha''\varphi \end{cases}$$

第 2 式, 第 3 式より $^\exists p = p(s)$, $^\exists C_2 \in \mathbb{R}$ s.t.

$$p' = \alpha''\varphi - \alpha'\varphi', \quad a = -\frac{1}{2}C_1\varphi + p, \quad b = \frac{1}{2}C_1\varphi + p - C_2$$

更に

$$\varphi'' = \frac{(\varphi')^2}{\varphi} - \varphi^2 + \frac{-p^2 + C_2 p}{\varphi} - \frac{1}{2}C_1C_2 + (\alpha')^2\varphi$$

標準形に対する Gauss の公式
その2

Gauss の公式は次と同値

$$\begin{cases} (2\varphi' - 2\alpha'\varphi + 2p - C_2)\gamma' \\ \quad = \gamma\left\{4\varphi A^2 + (-4C_1\varphi + C_2)A - 2\varphi^2 E\right\} \\ \gamma'(4\varphi A - C_2 E) = (2\varphi' + 2\alpha'\varphi - 2p + C_2)\gamma A \\ 4\gamma'' = \dfrac{2\varphi' + 6\alpha'\varphi + 2p - C_2}{\varphi}\gamma' - \gamma\dfrac{C_2 A + 2\varphi^2 E}{\varphi} \end{cases} \qquad (*)$$

f の中心アファイン性より

$$\det\begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma A \\ \gamma' \end{pmatrix} \neq 0$$

更に

$$8A^3 - 8C_1A^2 + C_3A + C_2E = O$$

標準形に対する Gauss の公式

その3

ただし

$$C_3 = -4\varphi + \frac{2C_1C_2}{\varphi} - \frac{C_2^2}{2\varphi^2} - 2\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + \frac{(2\alpha'\varphi - 2p + C_2)^2}{2\varphi^2} \in \mathbb{R}$$

$(*)$ 第1式左辺の γ' の係数

$$2\varphi' - 2\alpha'\varphi + 2p - C_2$$

に注目する

- 係数が0の場合: γ は平面曲線を用いて表すことができる
- 係数が0とならない場合: $(*)$ 第1式から残りの式が得られる

また

$$\det\begin{pmatrix}\gamma\\ \gamma A\\ \gamma A^2\end{pmatrix} \neq 0$$

特別な場合

命題

$f: M^2 \to \mathbb{R}^3$: 不定値中心アファイン曲面
余等質性 1
標準形で表しておく

(1) $C_1 = C_2 = 0$
$\Longrightarrow$ 次のように表される等積アファイン回転面と中心アファイン合同

$$f(x,y) = \begin{cases} (\mu(x)\cos y, \mu(x)\sin y, x) \\ (\mu(x)\cosh y, \mu(x)\sinh y, x) \\ \left(x, xy, \frac{1}{2}xy^2 + \mu(x)\right) \end{cases}$$

(2) f: 原点を中心とする固有アファイン球面
$\Longleftrightarrow$ $C_1 = 0$, α: 定数

(3) f: 中心アファイン極小曲面 $\Longleftrightarrow$ α: 1 次式

平坦ではない固有アファイン球面の場合

定理 (2019 F.-Furuhata)

$f : M^2 \to \mathbb{R}^3$: 原点を中心とする平坦ではない不定値固有アファイン球面
余等質性 1

$\Longrightarrow$ 標準形における γ, A は次のようにあたえられる

- A の最小多項式は $t^3 - \dfrac{c}{4}t + \dfrac{a-b}{8}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$
- γ は常微分方程式

$$(2\varphi' + a + b)\gamma' = \gamma\{4\varphi A^2 + (a-b)A - 2\varphi^2 E\}$$

の解

ただし $\varphi \neq 0$, $\varphi' \neq 0$, $-\frac{a+b}{2}$ で

$$(\varphi')^2 = -2\varphi^3 + c\varphi^2 + ab$$

定曲率中心アファイン極小曲面の場合

定理 (2019 F.-Furuhata)

$f: M^2 \to \mathbb{R}^3$: 中心アファイン極小曲面
余等質性 1

$\kappa :=$ 中心アファイン計量の曲率: 一定

$\Longrightarrow \kappa = 0, 1$

3 つの場合に分けることができる

すべて具体的に表すことができる

- $\kappa = 0$, $\mathcal{T} = 0$ (cf. 1995 Liu-Wang)
- $\kappa = 1$ かつ線織面 (cf. 2009 F: 余等質性の仮定なし) または楕円面の一部 (定値)
- $\kappa = 1$ で上以外のもの (cf. 2006 F: 特別な場合)

線形代数に関する命題

命題

$A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$
${}^{\exists} v \in \mathbb{R}^n$ s.t.

$$\det \begin{pmatrix} v \\ vA \\ \vdots \\ vA^{n-1} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (**)$$

$$\Updownarrow$$

A の最小多項式の次数は n

証明

$\Downarrow$: 対偶を示す
$\Uparrow$: $\mathbb{C}^n$ を A の広義固有空間の直和として表す

簡約化された中心アファイン曲線の定義

M_n: 最小多項式の次数が n の $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の元全体
$A \in M_n$: 固定

$$V_A := \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ は } (**) \text{ をみたす} \}$$

定義

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$: 曲線

$$\gamma\text{: } A \text{ に付随する簡約化された中心アファイン曲線}$$
$$\Updownarrow \text{def.}$$
$${}^\forall t \in I,\ \gamma(t) \in V_A$$

正則な曲線を考える: ${}^\forall t \in I$, $\gamma'(t) \neq 0$

曲率

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$: $A \in M_n$ に付随する簡約化された正則中心アファイン曲線

必要ならば変数変換を行うことにより

$^\exists\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n) : I \to S^{n-1}$ (単位球面) s.t.

$$\gamma' = \gamma(\kappa_1 E + \kappa_2 A + \cdots + \kappa_n A^{n-1}) \quad (\text{正規化})$$

κ を曲率という

γ は曲率の積分を用いて具体的に表すことができる

$C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}(A)$: A と可換な元からなる $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の部分群

$$C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}(A) = \{P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid AP = PA\}$$

$P \in C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}(A)$

$\Longrightarrow \gamma P$: γ と同じ曲率をもつ

曲率が大円に値をとる場合

定理 (2025 F.-Furuhata)

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$: 簡約化された中心アファイン曲線
曲率が大円に値をとる
$\Longrightarrow \gamma$ はある等質中心アファイン超曲面に含まれる

証明

$\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n) : I \to S^{n-1}$: γ の曲率

仮定より $^{\exists}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ s.t. $\sum_{i=1}^{n} a_i \kappa_i = 0$

$$\mathfrak{g} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i A^{i-1} \,\middle|\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$$

等質中心アファイン超曲面は $\{ v \exp X \mid X \in \mathfrak{g} \}$ $(v \in V_A)$ としてあたえられる

平面曲線の場合

定理 (2025 F.-Furuhata)

$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$: 簡約化された中心アファイン曲線
曲率が一定

$\Longrightarrow \gamma$ は次の等質中心アファイン曲線と中心アファイン合同な曲線に含まれる

$$(1)\ x^k y^l = 1$$

$$(2)\ (x^2+y^2)^{\frac{k}{2}} \exp\left(l \tan^{-1}\frac{x}{y}\right) = 1$$

$$(3)\ k \log y + l\frac{x}{y} = 0$$

ただし $(k, l) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

標準母線の場合

γ: 余等質性 1 の中心アファイン曲面に対する標準母線
一般には γ は簡約化された中心アファイン曲線
曲率は次のいずれかに値をとる

(1) 大円

(2) 楕円錐と球面の共通部分

(1) の場合: γ は原点を通る平面に含まれる
(2) の場合: 曲率が円錐と球面の共通部分に値をとる場合は更に計算可能
曲率は小円に値をとる
γ は曲率が大円に値をとる曲線を変形することにより得られる

ご清聴ありがとうございました