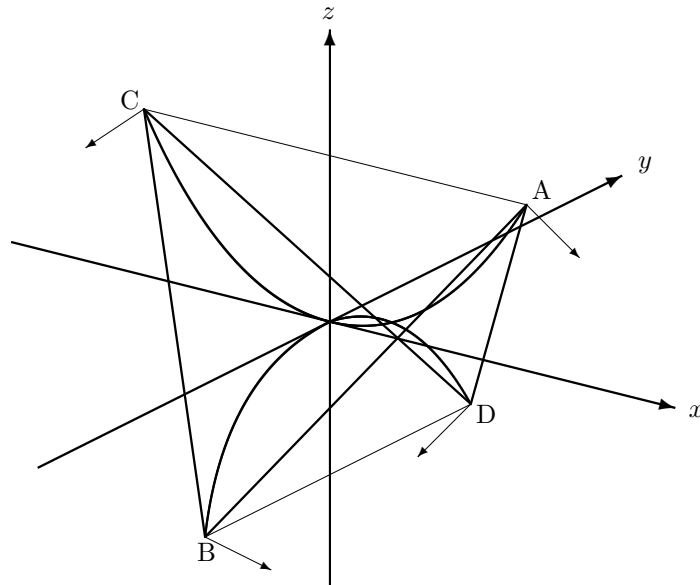


Schwarz Diamond 曲面の構成法

古来、極小曲面の研究は「与えられた針金の輪を境界にもつような曲面の中で面積が最小のものを決定せよ」という Plateau 問題と呼ばれる問題を解決することであり、結果的にこれは 1930 年頃まで解決されなかったわけである。1816 年に J. D. Gergonne が折れ線による四辺形で構成された針金に対する Plateau 問題を解決することを提唱したのであるが、このようなシンプルなシチュエーションですらなかなか解決されなかったという歴史がある。この問題を具体的に解決したのは H. A. Schwarz(1865 年) であり、同時期に B. Riemann も成果を上げていたそうである。事実、A. Schondorff は Riemann の考案した公式を用いて特殊な場合の Plateau 問題を解決していた。ここでは Nitsche の本「Lectures on minimal surfaces. Volume 1」で紹介されている Schwarz 曲面の構成法を紹介する。

1 Schwarz 曲面のシチュエーション



x 軸, y 軸, z 軸で構成される 3 次元空間内の四つの点 $A\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$,

$B\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $C\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $D\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ をとり, それぞれを結んで四本の折れ線による四辺形を作る. このとき, この四辺形を境界にもつ極小曲面 S が存在し, 以下が成り立つ:

- (i) 極小曲面 S は, 辺や頂点も含めて位置ベクトルや法ベクトルは連続であり頂点以外では解析的となる. このことから, この極小曲面は鏡像の原理によって四本の辺を通して解析的に拡張される.
- (ii) 極小曲面 S の Gauss 写像は単射となる.

極小曲面においては以下の Weierstrass 表現公式が知られているが, 次節では極小曲面 S の表現公式を導く.

Weierstrass の表現公式.

極小曲面 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ は次のように表わされる, ただし, M には等温座標系による複素構造を入れておくこととする:

$$f(p) = \int_{p_0}^p (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)^T R(z) dz,$$

ここで, p_0 は M の定点, T は転置行列を意味し, $R: M \rightarrow \mathbb{C}$ は零点をもたない解析的関数, g は $f(M)$ の Gauss 写像に対応する.

極小曲面 S の Gauss 写像は単射なので, 必要ならば適当な座標変換をすることにより, 局所複素座標 z を用いて $g = z$ と表わされる. 以上により, 極小曲面 S は

$$(1) \quad (x, y, z)^T = \int_{p_0}^p (1 - z^2, i(1 + z^2), 2z)^T R(z) dz$$

と表わされる. さらに第一基本形式は

$$(2) \quad ds^2 = (1 + |z|^2)^2 |R(z)|^2 |dz|^2,$$

Gauss 曲率 K は

$$(3) \quad K = \frac{-4}{|1 + |z|^2|^4 |R(z)|^2}$$

で与えられる. 第二基本形式 $Ldx^2 + 2Mdx dy + Ndy^2$ は

$$(4) \quad N = -L = 2\Re R(z), \quad M = 2\Im R(z)$$

となる. これにより $(N - L) + 2iM = 4R(z)$ を得る.

2 $R(z)$ の決定法

四つの辺上の点における接平面はその辺を含んでいるゆえ, 辺上の点における法ベクトルはその辺に直交する平面に平行な平面上にある. まず極小曲

面 S の Gauss 写像を考える．辺 AB 上の点における Gauss 写像の像を立体射影 $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ で複素平面 $\mathbb{C}$ に移したものを求めてみる．

$$\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

であることから，これに直交する平面の方程式は

$$(x, y, z) \cdot \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \text{const}$$

であり，特に原点を通るようなものの方程式は

$$(5) \quad (x, y, z) \cdot \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

となる．立体射影 π の逆写像

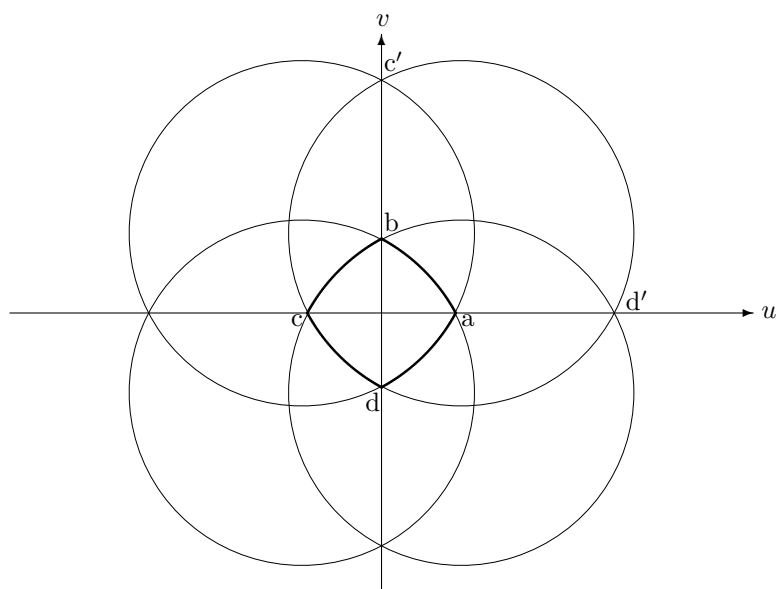
$$(6) \quad \pi^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow S^2$$

$$(u, v) \longmapsto \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right)$$

による像が (5) を満たす (u, v) 全体の集合は，(6) を (5) に代入すれば

$$\left(u + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(v + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 2$$

によって与えられ，この一部が辺 AB 上の点における Gauss 写像の像を立体射影で移したものになる．



同様に、辺 BC, 辺 CD, 辺 DA 上の点の Gauss 写像による像は

$$\begin{aligned}\left(u - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 &= 2 \\ \left(u - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 &= 2 \\ \left(u + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 &= 2\end{aligned}$$

の一部分となる.

四つの円の交点を a, b, c, d とおくと, $|a| = |b| = |c| = |d| = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ となることは容易に確認できる. 極小曲面 S の Gauss 写像による像は a, b, c, d を頂点とする太線で囲まれた領域になる.

太線 ab は

$$z = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}e^{i\theta} \quad \left(\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right)$$

と表わされるが, θ が $\pi/6 \mapsto \pi/3$ と動くに従って極小曲面 S 上では頂点 A から頂点 B まで動く. ここで太線 ab 上での弧長 s による微分を考えると

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

となり, これを表現公式を用いて書き直すと

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \frac{1}{2} \left\{ (1-z^2) R(z) \frac{dz}{ds} + (1-\bar{z}^2) \overline{R(z)} \frac{d\bar{z}}{ds} \right\} = -\frac{1}{2}, \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{i}{2} \left\{ (1+z^2) R(z) \frac{dz}{ds} - (1+\bar{z}^2) \overline{R(z)} \frac{d\bar{z}}{ds} \right\} = -\frac{1}{2}, \\ \frac{dz}{ds} &= z R(z) \frac{dz}{ds} + \bar{z} \overline{R(z)} \frac{d\bar{z}}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

が従う. よって

$$(7) \quad \frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds} = -z^2 R(z) \frac{dz}{ds} + \overline{R(z)} \frac{d\bar{z}}{ds} = -\frac{1+i}{2}$$

$$(8) \quad \frac{dx}{ds} - i \frac{dy}{ds} = R(z) \frac{dz}{ds} - \bar{z}^2 \overline{R(z)} \frac{d\bar{z}}{ds} = -\frac{1-i}{2}.$$

(7) $\times (-i)$ = (8) なので

$$(1-iz^2) R(z) dz + (i-\bar{z}^2) \overline{R(z)} d\bar{z} = 0.$$

これにより, 太線 ab 上では

$$(9) \quad \frac{\overline{R(z)}}{R(z)} = -e^{4i\theta}$$

が成り立つ. 太線 bc, 太線 cd, 太線 da 上でも同様の議論が成り立つ.

$R(z)$ は四つの頂点以外では太線の内部とその周上で解析的になる．それぞれの頂点での漸近展開を通して $R(z)$ を決定する．まず頂点 a の近傍で

$$R(z) = (a - z)^\kappa \{a_0 + a_1(a - z) + \cdots\}$$

と展開しておく．この κ を決定するために z 平面を $z = a$ から実軸に沿って $z = \infty$ まで裂いておく．

$$z = a - re^{i\theta} \quad (r \geq 0, |\theta| \leq \pi/3)$$

で定義される頂点 a から太線の内部へ延びている半直線上の点での接ベクトルにおいて $r \rightarrow 0$ として頂点 a での接ベクトルを求めることを通して $R(z)$ を考える．

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{1}{2} \left\{ (1 - z^2) R(z) \frac{dz}{ds} + (1 - \bar{z}^2) \overline{R(z)} \frac{d\bar{z}}{ds} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - (a - re^{i\theta})^2}{1 + |a - re^{i\theta}|^2} \frac{r^k e^{i\kappa\theta} (a_0 + a_1 re^{i\theta} + \cdots) (-dre^{i\theta})}{r^k |a_0 + a_1 re^{i\theta} + \cdots| dr} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1 - (a - re^{-i\theta})^2}{1 + |a - re^{-i\theta}|^2} \frac{r^k e^{-i\kappa\theta} (a_0 + a_1 re^{-i\theta} + \cdots) (-dre^{-i\theta})}{r^k |a_0 + a_1 re^{-i\theta} + \cdots| dr} \\ &\xrightarrow{r \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \left\{ \frac{a_0}{|a_0|} e^{i(\kappa+1)\theta} + \frac{\bar{a}_0}{|a_0|} e^{-i(\kappa+1)\theta} \right\} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \cos\{(\kappa+1)\theta + \varphi\}, \end{aligned}$$

ここで $\varphi \in [0, 2\pi)$ は $a_0/|a_0|$ の偏角とする．同様に

$$\frac{dy}{ds} = \sin\{(\kappa+1)\theta + \varphi\}, \quad \frac{dz}{ds} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos\{(\kappa+1)\theta + \varphi\}$$

を得る．

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right)_{z=a} = \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) & (\theta = -\pi/3 \text{ のとき}) \\ \overrightarrow{AD} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) & (\theta = \pi/3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ゆえ、二つの整数 n, m を用いて

$$\kappa = -\frac{1}{2} + 3(n - m), \quad \varphi = (n + m)\pi$$

と表わされる．これにより $\varphi \in [0, 2\pi)$ は 0 か π のいずれかになる． $R(z)$ の代わりに $-R(z)$ を考えても極小曲面としては全く同じものを考えることになることから、 $\varphi = \pi$ のときは $-R(z)$ としてこれまでの議論を行うことにより、結局、最初から $\varphi = 0$ として考えても一般性を失わない．このとき $\kappa = -1/2 + 6n$ の型になる．

曲面の対称性からこのことは頂点 b, c, d でも成り立っているので,

$$R(z) = \frac{\phi(z)}{\{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)\}^{\frac{1}{2}-6n}}$$

と表わされる. さらに極小曲面 S は四つの辺を通して鏡像の原理によって解析的に拡張されることから, 四つの頂点を鏡像の原理で拡張して生じる新しい頂点 a', b', c', d' においても同じことが成り立つ.

太線の内部を太線 ab を通して鏡像の原理で拡張したものを求める. まず太線 bc は

$$\left(u - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2$$

の一部ゆえ, $z = u + iv$ とおくと

$$(10) \quad \left|z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right|^2 = 2.$$

z の鏡像の原理による像を w で表わすと

$$\left(z + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \overline{\left(w + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)} = 2$$

なので,

$$z = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} + \frac{\overline{2}}{w + \frac{1+i}{\sqrt{2}}}.$$

これを (10) に代入して整理すると

$$\left|w - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right| = \left|w + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right|$$

が従う. これは $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ と $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ の垂直二等分線であり, 太線 bc の像は線分 bc' となる. 同様の議論により, 太線 cd の像は弧 $c'd'$, 太線 da の像は線分 $d'a$ となることが判る.

以下, 同じ議論によって, 太線の内部を太線 bc , 太線 cd , 太線 da を通して鏡像の原理で拡張させたものも具体的に求めることができる. 結局, 四つの円を鏡像の原理を通して移したものは軸かあるいは四つの円のどれかになる. よって, 太線の内部を鏡像の原理で拡張したものは四つの円の周および内部の和集合となる.

$$|a'| = |b'| = |c'| = |d'| = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

であることも容易に確認できる.

八つの頂点 $a \sim d'$ を $\{z_j\}_{j=1}^8$ とおくと

$$R(z) = \frac{\psi(z)}{\{\prod_{j=1}^8 (z - z_j)\}^{\frac{1}{2}-6n}} = \frac{\psi(z)}{(z^8 - 14z^4 + 1)^{\frac{1}{2}-6n}}$$

と表わされる． $R(z)$ は z_j 以外の特異点はないので $z \neq z_j, \infty$ にて 0 にはならず，

$$(11) \quad \psi(z) = k + k_1 z + k_2 z^2 + \cdots$$

と展開したときに，ある 2 以上の自然数 l で $k_m = 0$ ($m \geq l$) となるものは存在しない．もしそのような l があれば $R(z)$ は $k + k_1 z + k_2 z^2 + \cdots + k_{l-1} z^{l-1} = 0$ となる点で 0 となるからである．

$z = \infty$ は正則点 $z = \pm 1/\sqrt{2} \pm i/\sqrt{2}$ の四つの円に関する鏡像であることから $z = \infty$ でも正則点にならないといけなないので，(11) のように展開した場合，各 k_j は 0 になるしかない．何故なら，0 でない $k_{j_1}, k_{j_2}, \dots$ を用いて

$$\psi(z) = k + k_{j_1} z^{j_1} + k_{j_2} z^{j_2} + \cdots$$

とできるとき， $z = \infty$ にて $R(z)$ は爆発し特異点となるからである．

よって， $\psi(z) = k$ となるしかなく，さらに $k > 0$ として考えても一般性を失わない．

太線 ab

$$z = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} e^{i\theta} \quad \left(\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right)$$

の上では

$$\begin{aligned} z^8 - 14z^4 + 1 &= -16e^{4i\theta} \{21 - 28(\cos \theta + \sin \theta) + 28 \sin(2\theta) \\ &\quad + 8(\cos(3\theta) - \sin(3\theta)) - 2 \cos(4\theta)\}. \end{aligned}$$

ここで，

$$21 - 28(\cos \theta + \sin \theta) + 28 \sin(2\theta) + 8(\cos(3\theta) - \sin(3\theta)) - 2 \cos(4\theta)$$

を $\Phi(\theta)$ とすると， $\Phi(\theta)$ は各 z_j でしか 0 にならないことと太線 ab 上で実数値をとり連続であることから， $\Phi(\theta)$ は太線 ab の端点で 0 になり，太線 ab の内部では一定の符号になる． $\theta = \pi/4$ のとき

$$\Phi(\theta) = 21 - 28\sqrt{2} + 28 - 8\sqrt{2} + 2 = 16(51 - 36\sqrt{2}) > 0$$

ゆえ，太線 ab 上において $\Phi(\theta) \geq 0$ となるので， $\Phi(\theta)$ は偏角が一定になる．

(9) を加味すると $n = 0$ となり，最終的に

$$R(z) = \frac{k}{\sqrt{z^8 - 14z^4 + 1}}$$

を得る．最初から $1/k$ をかけても相似変換の差しかないので，初めから $R(z) = 1/\sqrt{z^8 - 14z^4 + 1}$ として考えても一般性を失わない．

以上により, (1) は

$$(12) \quad (x, y, z)^T = \int_{p_0}^p (1 - z^2, i(1 + z^2), 2z)^T \frac{dz}{\sqrt{z^8 - 14z^4 + 1}}$$

となる.

$\sqrt{z^8 - 14z^4 + 1}$ が well-defined になるような Riemann 面を考えると, $w^2 = z^8 - 14z^4 + 1$ で定義されるアフィン平面曲線である. これを $z = \infty$ でコンパクト化したものが

$$w^2 = z^8 - 14z^4 + 1 \quad \underbrace{\longleftrightarrow}_{z=\frac{1}{x}, w=\frac{y}{x^4}} \quad y^2 = x^8 - 14x^4 + 1$$

で定義される種数 3 の超楕円型 Riemann 面であり, この Riemann 面を M として

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}^3 / \Lambda$$

$$p \longrightarrow \int_{p_0}^p (1 - z^2, i(1 + z^2), 2z)^T \frac{dz}{w}$$

で定義される極小曲面が Schwarz の Diamond 曲面に対応する. ただし, Λ はしかるべき立方体の格子である.

3 Diamond 曲面の概形

Diamond 曲面は四本の折れ線に関する Plateau 問題の解となる極小曲面に始まり, 境界を構成する折れ線に関する鏡像によって曲面を増やしていったものである. これは 3 重周期の極小曲面になっており, 以下ではグラフィックスを通してそれを見ることにする.

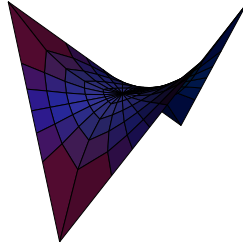


図 1: 太線 abcd の内部に対応する極小曲面

まず図 1 の曲面を四本の境界に関する鏡像で増やしたものを考えると，図 2 が得られる．これは斜め上から見た図と真上から見た図であり，図 1 の曲面が 5 つ含まれている．

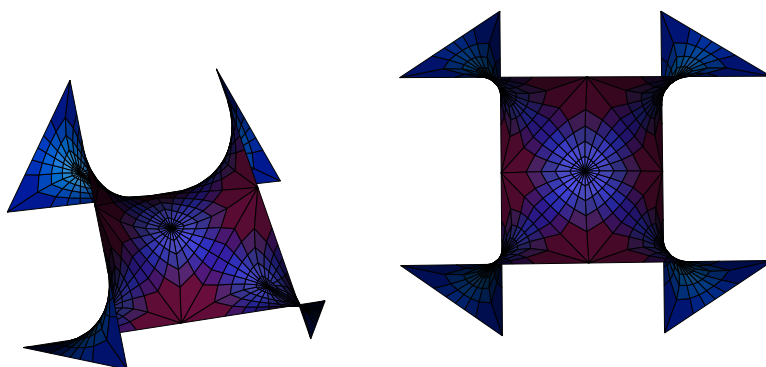


図 2: $|z - (\pm 1/\sqrt{2} \pm i/\sqrt{2})| = \sqrt{2}$ で囲まれた部分に対応する極小曲面

次に $|z - (\pm 1/\sqrt{2} \pm i/\sqrt{2})| = \sqrt{2}$ で囲まれる部分の外部に対応する極小曲面を付け加えると，図 3 を得る．図 3 は斜め上から見た図と真上から見た図であり，図 1 の曲面が 6 つ含まれている．

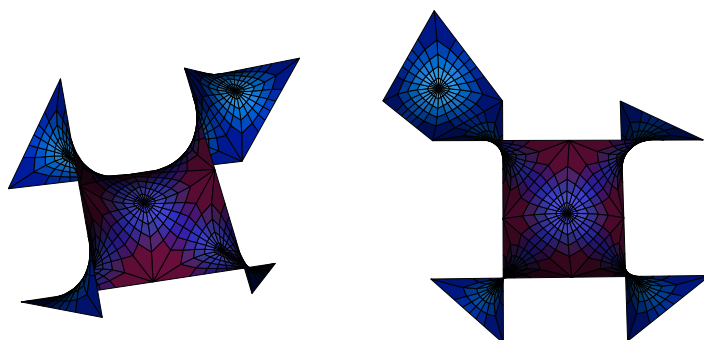


図 3: 球面 1 つ分に対応する極小曲面

これは正方形を底面とする直方体に含まれており，上から見ると正方形に含まれている．正方形の左右の辺と上下の辺とをそれぞれ平行移動で同一視すると図 4 となる．これは図 2 の四隅にある曲面を平行移動して図 3 にある $z = \infty$ を含む曲面にくっつけたものである．

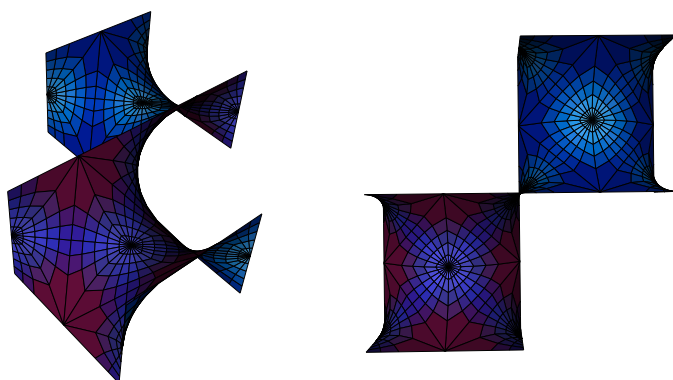


図 4: 球面 1 つ分に対応する極小曲面

この曲面を高さの方向に鏡像によって増やしたものを二つの角度から見たのが図 5 である.

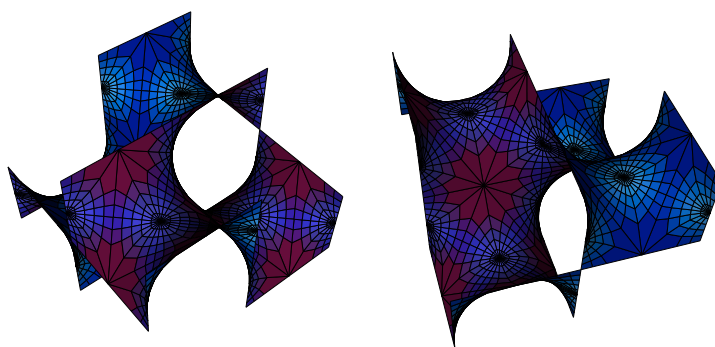


図 5: 球面 2 つ分に対応する極小曲面

図 5 の曲面が縦, 横, 高さの 3 つの方向に周期的に広がっているのが Diamond 曲面といわれている極小曲面である. また, この周期を表す格子によって $\mathbb{R}^3$ を割ってトーラスを作り, この曲面をトーラス内の極小曲面と考えてもよく, これを Diamond 曲面ともいう.